

# ESTUDO DE LANÇAMENTOS REAIS DE PROJÉTEIS UTILIZANDO PLANILHAS DE CÁLCULO

\* **Emerson L. Gelamo**  
Universidade Camilo Castelo Branco

**Rogério V. Gelamo**  
Universidade Estadual de Campinas

## Resumo

Este trabalho apresenta o estudo detalhado a respeito dos lançamentos reais de projéteis para o espaço, levando em conta as características físicas e geométricas do projétil, a força de arrasto, a variação da densidade do ar enquanto o projétil desloca-se sob a influência da atmosfera e a variação do campo gravitacional terrestre durante toda sua trajetória. As soluções analíticas destes problemas mostram que este tipo de lançamento independe da densidade do material do projétil bem como do seu tamanho, concluindo-se que tal lançamento é impossível de ser realizado da superfície da Terra, pois tanto a energia clássica quanto a relativística, necessárias para realizá-lo deveria ser extremamente elevada, tendendo ao infinito.

**Palavras-chave:** lançamentos; força de arrasto; efeitos atmosféricos.

## Study of real postings off bullets using spreadsheets

### Abstract

This work shows the detailed study relative to the real projectile launching to the space, taking account the physics and geometrics projectile characteristics, air resistance force, the air density variation while projectile motion under atmosphere influence and the earth gravitational field variation during by all the way. The analytical solutions of this problems show that this kind of launching independent of the projectile material density as well its size, concluding that this launching is impossible to be realized from earth surface, due to both classical and relativistic energy necessary to that should be extremely high, tending to infinite value.

**Key-words:** launching; air resistance force; atmospheric effects.

## INTRODUÇÃO

Os primeiros registros a respeito do estudo dos movimentos que ocorrem na direção vertical, e data de 300a.C. foram feitos pelo filósofo grego Arístóteles. Segundo sua concepção, se dois objetos de massas diferentes fossem abandonados de uma altura qualquer, o mais pesado chegaria primeiro ao solo. Esta concepção foi aceita até o século XVII, quando então o Físico italiano Galileu Galilei, através da experimentação, comprovou que esta afirmação era falsa, ou seja, duas esferas, de massas diferentes, abandonadas da mesma altura, próximas à superfície da Terra, atingiam o solo no mesmo instante. Eventuais diferenças nos tempos de queda dos corpos foram corretamente atribuídas à resistência do ar e não às diferenças de massas dos corpos. Da mesma forma, os lançamentos de projéteis a longas distâncias sempre foram alvo de estudo homem, sendo os primeiros registros de instrumentos para tal fim, denominados “catapultas”, datam por volta de 300a.C. A invenção desses instrumentos de lançamento foi atribuída à Arquimedes, o mesmo da célebre frase: “ Dêem-me uma alavanca e deslocarei o mundo”. Com esse instrumento, os Sicilianos conseguiram manter os romanos afastados de Siracusa, terra natal de Arquimedes [1].

Na resolução de problemas que envolvam lançamentos de projéteis, algumas equações matemáticas e teoremas físicos podem ter soluções analíticas bastante complicadas e a obtenção dessas soluções que descrevem o movimento do projétil a partir de primeiros princípios torna-se praticamente inviável. A inserção de um ou mais corpos de prova, promove um crescimento exponencial em relação ao grau de complexidade do problema, devido às interações de cada corpo com os demais. Alguns formalismos matemáticos e teoremas físicos podem ser aplicados para reduzir o grau de complexidade para a obtenção destas soluções. Ainda assim, em algumas condições, poderá não haver redução significativa quanto ao grau de complexidade, pois qualquer formalismo possui limitações.

Algumas aproximações podem ser efetuadas no sentido de viabilizar a obtenção das soluções, entretanto, estas aproximações não devem ser realizadas arbitrariamente, pois sua prática depende do grau de influência de alguns fatores, por exemplo, para estudar a queda de corpos a partir de alturas da ordem de alguns metros, a força de arraste pode ser negligenciada e a força de atração gravitacional pode ser considerada constante. Neste caso a solução é trivial, porém, aplica-se apenas nas condições decorrentes das hipóteses aproximativas aplicadas para possibilitar a obtenção da solução analítica. Portanto, é importante salientar

que as aproximações causam limitações quanto ao intervalo de validade das soluções.

### Forças Atuantes em Projéteis

O termo “Queda Livre” é utilizado no ensino da física para caracterizar o movimento de um objeto que se movimenta na direção vertical em relação à superfície do mar, tanto no sentido de baixo para cima quanto no sentido de cima para baixo, embora o termo “Queda” possa induzir o aluno a conceber que tal movimento contemple apenas o segundo sentido. O termo “Livre” refere-se a ausência dos efeitos atmosféricos sob o projétil, portanto a dinâmica do movimento depende apenas da força de atração gravitacional em função da altitude, descrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton.

$$F = \frac{G.M}{(R + y)^2} . m \quad (1)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional ( $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$ ),  $R$  é o raio da Terra ( $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ),  $M$ , a massa da Terra ( $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ),  $m$  a massa do projétil e  $y$  a altura do objeto em relação à superfície da Terra.

Considerando que este movimento ocorra nas regiões às baixas altitudes, ou seja, próximas à superfície da Terra ( $y=0$ ), a única força que atua no projétil é a gravitacional e a aceleração à qual o projétil é submetido pode ser expressa por

$$g = \frac{G.M}{R^2} \quad (2)$$

de onde se obtém o valor de  $g = 9,78 \text{ m/s}^2$

A Tabela 1 mostra uma relação de valores de campo gravitacional obtidos para diversas altitudes, calculados através da equação (1) em relação à linha do equador e pode-se perceber que a variação de  $g$  é significativa para altitudes acima de 300m em relação ao nível do mar, portanto, sugere-se o uso da expressão (2) para o estudo dos movimentos acima desta altitude.

**Tabela 1.** Valor da aceleração gravitacional calculado para diversas altitudes em relação à linha do equador.

Altitude (km)	g (m/s <sup>2</sup> )
0	9,78
10	9,78
100	9,57
300	8,80
1.000	7,75
5.000	3,75
10.000	1,94

Um objeto que se movimenta num meio material fica sujeito a uma força de resistência denominada por **Força de Arrasto**, cuja intensidade depende das características do meio bem como da geometria do objeto, cuja expressão analítica é dada por [2-5]

$$F_r = C_x \cdot A \cdot \rho(r) \cdot v^2(r) / 2 \quad (3)$$

onde  $C_x$  é o coeficiente de arrasto aerodinâmico,  $A$  a área do objeto que se “opõem” efetivamente ao movimento,  $\rho(r)$  é a densidade do meio, e  $v(r)$  o módulo da velocidade do objeto. Embora a direção do vetor Força de Arraste é a mesma do vetor velocidade, seu sentido é contrário ao movimento.

A palavra “projétil” no lugar de corpo é mais adequada, e o meio no qual o projétil executa seu movimento é a atmosfera terrestre, portanto o termo que comparece na equação (3) representa a densidade do ar, cujo valor em função da altitude em relação ao nível do mar,

é expressa por (Houghton):

$$\rho(y) = -6.10^{-14}.y^3 + 4.10^{-9}.y^2 - 10^{-4}.y + 1,2255 \quad (kg/m^3) \quad p/ \quad 0 \leq y < y' \quad (4)$$

$$\rho(y) = 0 \quad p/ \quad y \geq y'$$

$y'$  corresponde à altura a partir da qual a densidade do ar é nula.

Para  $y > y'$  a densidade é  $\rho(y') = 0$ , isto é verificado na figura 1, onde observamos que o valor da densidade do ar diminui a medida que a altitude em relação ao nível do mar aumenta.

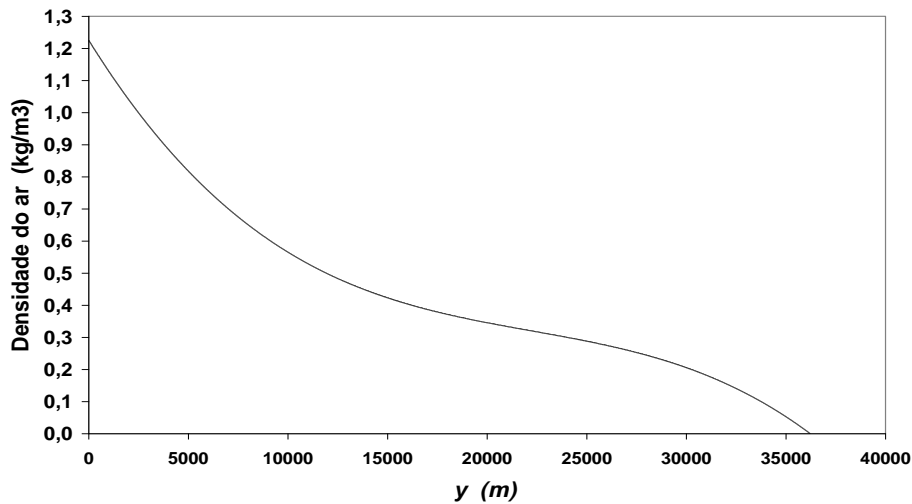


Figura 1. Valor da densidade do ar em função da altitude em relação ao nível do mar (Houghton).

A partir de  $36.220m$  de altitude a densidade da atmosfera é nula, significando que o projétil não fica mais sujeito à força de arraste, por outro lado esta densidade adquire o valor máximo em  $y = 0$  correspondendo a densidade do ar ao nível do mar:

$$\rho(0) = 1,226 \quad kg/m^3$$

## Velocidade de Escape Real

### Velocidade de Escape no Vácuo

Se um projétil é lançado na direção vertical com alta velocidade a partir da superfície da terra em direção ao espaço, existem duas possibilidades para o destino final do projétil:

- 1) Após algum tempo o projétil retorna à terra por conta da atração gravitacional.
- 2) O objeto não retorna à terra. Neste caso a velocidade de lançamento foi alta o suficiente, de forma que o valor da sua energia cinética supera a energia potencial gravitacional e o projétil sai da órbita da Terra.

A velocidade de escape é definida como a velocidade mínima com que um projétil deve ser lançado na direção vertical de forma que sua energia cinética anule quando o projétil atinge o “infinito”. Para efeito de cálculo utiliza-se o seguinte referencial:

- a) Eixo 0-Y tem direção radial (perpendicular à superfície da Terra);
- b) Origem no nível do mar;
- c) Orientado no sentido de baixo para cima.

O teorema do trabalho e energia cinética para uma força cuja direção é a igual a direção do deslocamento do corpo é:

$$E_{y'} - E_0 = \int_0^{y'} F(y) dy \quad (5)$$

substituindo (1) em (5) e efetuando a integral com  $y' \rightarrow \infty$ , e anulando a energia cinética do corpo no infinito:  $E_\infty = 0$ , obtém-se

$$0 - E_0 = -\frac{G.M.m}{R}, \quad \text{com} \quad E_0 = \frac{mv_{ESC}^2}{2} \quad (6)$$

Igualando as equações acima, obtemos a expressão para a Velocidade de Escape:

$$v_{ESC} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (7)$$

No caso do planeta Terra, desprezando a força de arrasto, esta velocidade de escape é de  $v_{ESC} = 11.200\text{m/s}$ .

Classicamente, a obtenção da velocidade de escape para projéteis de diferentes características: massa, forma e área, requer o conhecimento da força de arraste a partir do lançamento do projétil da superfície da Terra até a altitude de 36.220m, onde a densidade do ar torna-se nula. Neste caso, a resultante das forças que atuam sobre o projétil é

$$R(y) = -m \cdot \frac{G.M}{(R_T + y)^2} - \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot A \cdot \rho(y) \cdot v^2(y) \quad \text{para } 0 < y < y' \quad (8)$$

com  $y' = 36220m$ , e

$$R(y) = -m \cdot \frac{G.M}{(R_T + y)^2} \quad \text{para } y > y' \quad (9)$$

Dividindo a equação (8) pela massa do projétil  $m$ , e aplicando a segunda lei de Newton, obtemos a aceleração do projétil em função de sua altitude  $y$ .

$$\frac{R(y)}{m} = a(y) = -G.M \cdot \frac{1}{(R + y)^2} + q \cdot \rho(y) \cdot v^2(y) \quad (10)$$

onde:

$$q = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot C_x \cdot A \quad (11)$$

O termo  $q$  contém as características físicas do projétil às quais contribuem fortemente para a intensidade da força de arraste. Portanto para cada tipo de projétil, existe um valor específico para  $q$ . Esta relação permite calcular a velocidade de escape para diferentes valores de massa, área e formato do projétil.

Partindo da velocidade e aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{dv(y)}{dt} = \frac{dv(y)}{dy} \cdot v(y) \quad (12)$$

e a relação entre aceleração e velocidade

$$a(y) = \frac{dv(y)}{dt} \quad (13)$$

a equação (10) toma a seguinte forma

$$\frac{dv}{dy} = -G.M.v(y)^{-1}(R+y)^{-2} + q.\rho(y).v(y) \quad (14)$$

Após o projétil superar a altitude de  $y' = 36220\text{m}$ , o sistema passa a ser conservativo, pois não ocorre mais dissipação de energia para o meio. Neste caso a velocidade do projétil na altitude de  $36.220\text{m}$  para que alcance o infinito com energia igual a zero é determinada pela condição:

$$E_{\text{cinética}}(y') = U_{\text{gravitacional}}(y') \quad \Rightarrow \quad 0 - E_{\text{ESCAPE}} = -m \frac{G.M}{(R+y')} \quad (15)$$

Portanto a velocidade de escape de um projétil lançado a  $36220\text{m}$  de altitude é igual a  $v(y') = 10.780\text{m/s}$ .

Se a velocidade do projétil atingir valores próximos à velocidade da luz, a segunda Lei de Newton não se aplica neste caso, devendo-se considerar o efeito relativístico. Neste caso,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (16)$$

O momento linear relativístico pode considerado para a obtenção da segunda Lei de Newton relativística, expressa por

$$\vec{P} = \gamma m \vec{v} \quad (17)$$

onde  $\gamma$  é denominada transformada de Lorentz, e seu valor depende da velocidade da partícula:



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (18)$$

Se a força resultante possuir a mesma direção do movimento da partícula, esta força pode ser expressa por

$$F = \gamma^3 \cdot m \cdot a \quad (19)$$

E substituindo (12) e (18) em (19), obtém-se

$$F = m \cdot \frac{v}{[1-(v/c)^2]^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dh} \quad (20)$$

O trabalho realizado por uma força que possui a mesma direção do deslocamento da partícula é  $w = -\int F \cdot dh$ . Então, o trabalho realizado para acelerar uma partícula do repouso até a velocidade de  $v = f \cdot c$  (com:  $0 \leq f < 1$ ) é

$$W = -m \cdot \int_0^v \frac{v}{[1-(v/c)^2]^{3/2}} \cdot dv \quad (21)$$

adotando  $u = \frac{v}{c}$  na equação integral acima, tem-se

$$W = -m \cdot c^2 \int_0^{v/c} \frac{u}{(1-u^2)^{3/2}} \cdot du \quad (22)$$

A solução da equação (22) é expressa por

$$W = m.c^2 \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right] \quad (23)$$

A energia total é igual a soma da energia de repouso com o trabalho realizado

$$E = m.c^2 + W_{LN} \quad (24)$$

então

$$E = \gamma.m.c^2 \quad (25)$$

que representa exatamente a mesma expressão para a energia total de um corpo em movimento obtida por Albert Einstein na sua Teoria da Relatividade Restrita publicada em 1905 (Searway, 2004).

A solução da equação (14) fornece a velocidade de escape para qualquer tipo de projétil cujas características pertinentes estão implícitas genericamente no fator “ $q$ ”. esta equação pode ser facilmente resolvida por meio do método de Runge Kutta, partindo das condições iniciais:  $y_0 = 36220$  m e  $v_0 = 10.780$  m/s até  $y = 0$ , ponto no qual a velocidade corresponde à velocidade de escape.

Neste problema, a força de arraste atua fortemente contra o movimento do projétil fazendo com que a velocidade de escape seja várias ordens de grandeza maior da velocidade de escape no vácuo. Portanto a equação (14) deve ser resolvida para projéteis com características que minimizem o efeito da força de arraste.

## OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a velocidade de escape para diferentes tipos de projéteis, considerando todos os fatores que influenciam seu movimento –

as características físicas e geométricas do projétil, a força de arraste, a variação da densidade do ar enquanto o projétil desloca-se sob a influência da atmosfera e a variação do campo gravitacional terrestre durante toda sua trajetória.

## RESULTADOS

Todos os resultados apresentados foram obtidos numericamente através do algoritmo iterativo da equação (14), na qual foi utilizado o valor de 0,5m para o incremento  $\Delta y$ .

### Projétil 1

Formato de gota d'água em queda, cujo coeficiente aerodinâmico é o menor possível ( $C_x = 0,08$ ). Este formato é realmente bastante interessante do ponto de vista aerodinâmico. Corresponde ao formato do perfil das asas dos aviões, ou então, ao formato dos submarinos que se deslocam sob as águas profundas e também ao formato dos peixes. Para o cálculo do volume, aproximamos a forma geométrica do projétil supondo que este seja formado pela junção de um hemisfério de uma esfera de raio  $3r$ , e comprimento  $4r$ , conforme mostra a figura 2. O volume total do projétil é igual à soma do volume do cone com a metade do volume da uma esfera de raio  $3r$ , então

$$V = 16,48.r^3 \quad (m^3)$$

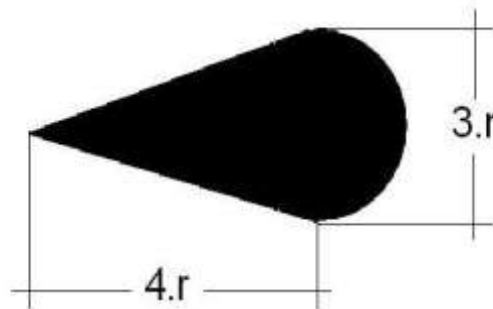


Figura 2. Geometria de um projétil com formato próximo ao de uma gota d'água caindo sujeita a resistência do ar. O projétil é composto pela junção de um hemisfério de uma esfera de raio  $r$  com um cone de altura igual a  $4.r$  e raio da base igual a  $r$ .

O projétil é maciço e composto integralmente por “Ósmio”, o elemento químico de maior densidade de massa:  $d_{\text{ósmio}} = 22600 \text{ kg/m}^3$ . O valor do raio pode ser utilizado como parâmetro de ajuste, de forma que a massa do projétil possui forte dependência sobre o valor do raio

$$m = 7,4 \cdot 10^5 \cdot r^3$$

Um projétil de raio 0,01cm tem massa igual a 0,74g, e sua velocidade de escape é de 29.000 m/s. Aumentando o valor do raio de 0,01cm a 0,035cm, a velocidade de escape diminui rapidamente caindo para 15.000 m/s, a partir deste ponto a velocidade tende a um valor assintótico próximo da velocidade de escape no vácuo, conforme pode ser observado na Figura 3.

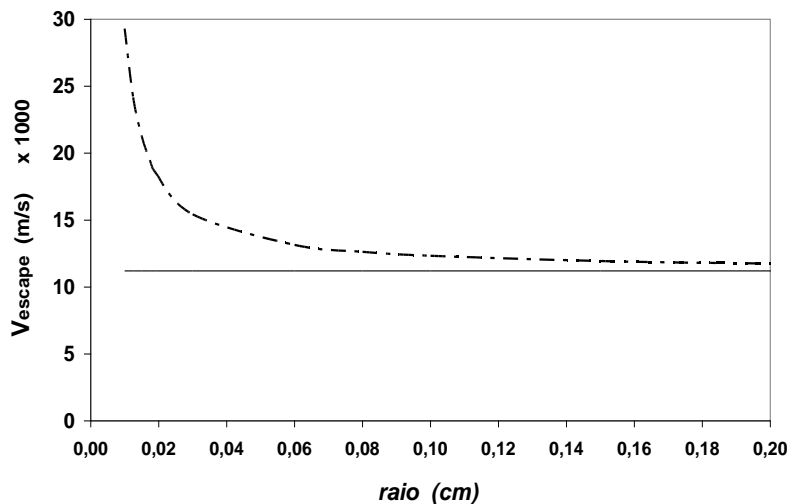


Figura 3. Velocidade de escape em função do raio do projétil em forma de gota d'água (linha tracejada). Velocidade de escape vácuo ( linha contínua).

Este efeito parece ser paradoxal, porém, ele pode ser facilmente compreendido, considerando-se que a equação diferencial a ser resolvida (equação 14), contém dois termos: o primeiro, relativo à força gravitacional e o segundo, relativo à força de arrasto. O parâmetro  $q$

no segundo termo desta equação é inversamente proporcional à massa do projétil, portanto, ele tende a zero com o aumento da massa do projétil, fazendo com que este segundo termo da equação diferencial desapareça. Isso explica o fato da velocidade de escape do projétil tender ao valor da velocidade de escape na ausência da força de arrasto.

## Projétil 2

Considerando uma esfera ( $C_x = 0,47$ ) de chumbo ( $d=11.340\text{kg/m}^3$ ) de raio 5 mm, obtém-se um corpo de massa 6g que apresenta um valor de  $q = 0,003$ . Na Figura 4, pode-se observar que o projétil atinge uma altura assintótica em torno de apenas 3,1km quando lançado com velocidade de  $5.10^6\text{km/h}$ . Observe ainda que esta velocidade é extremamente elevada. Neste caso, o efeito atmosférico é proporcional a  $v^2$  e a velocidade necessária para efetivar tal lançamento seria impossível de ser atingida.

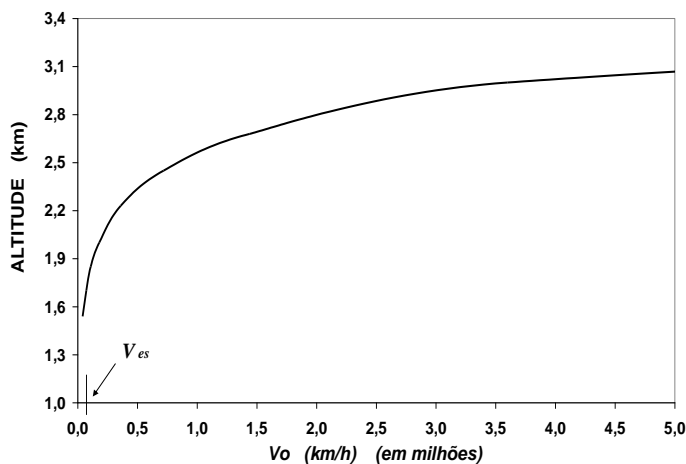


Figura 4. Altura atingida por um projétil esférico de chumbo (raio = 5mm) em função da velocidade de lançamento.

A Figura 5 apresenta a velocidade de escape para este projétil esférico. É interessante destacar que é verificado o mesmo efeito observado para o projétil 1, porém, com efeito mais atenuado, ou seja, a velocidade de escape tende a um valor assintótico em torno de  $3.10^5$  m/s para um projétil de raio acima de 0,3m.

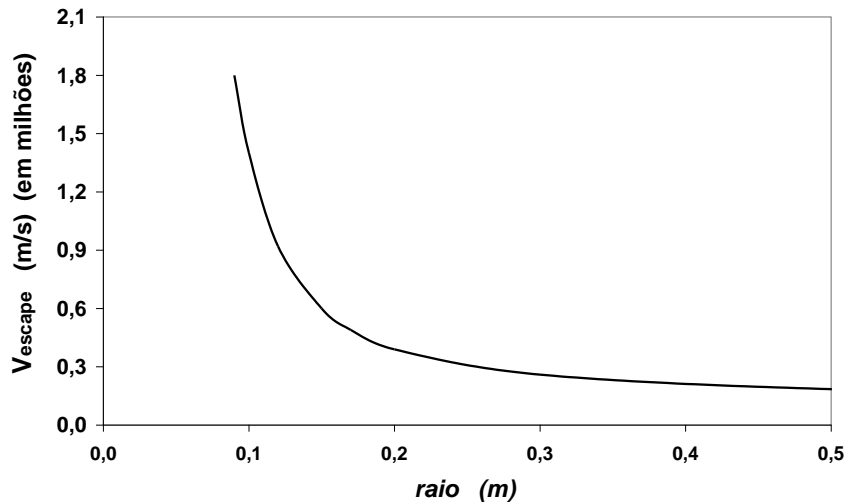


Figura 5. Velocidade de escape em função do raio de um projétil esférico.

Considerando as altas velocidades necessárias para o lançamento destes projéteis, faz-se necessário considerar o efeito relativístico. Neste caso, o parâmetro  $q$  deve ser corrigido pelo fator de Lorentz e assume o valor  $q = 0,003 \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}$ . Desta forma, pela segunda Lei de Newton relativística a aceleração é expressa por  $a = \gamma^3 \cdot \frac{dv}{dt}$ .

De acordo com a Figura 6, pode-se perceber que classicamente, a energia necessária para lançar um projétil que consiga vencer as forças de arrasto e gravitacional seria extremamente elevada. Observe que para atingir a altura de apenas 5,1km, a energia de lançamento do projétil seria de 80 GWh e ao considerar o efeito relativístico, esta energia deveria ser maior ainda, tendendo assintoticamente ao infinito, o que seria impossível na prática.

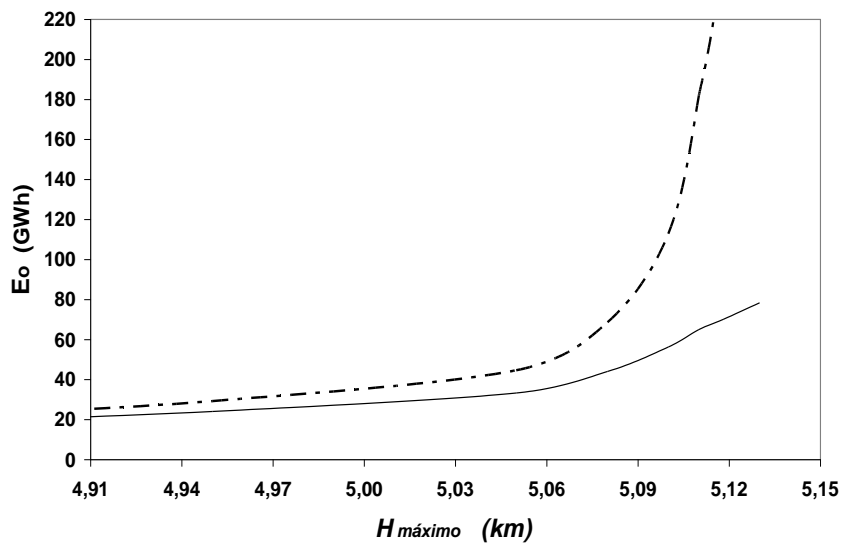


Figura 6. Energia necessária de lançamento de uma partícula esférica de chumbo de raio 5mm em função da altura máxima atingida, considerando o lançamento clássico (linha contínua) e considerando o efeito relativístico (linha tracejada).

## CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho mostram claramente que as discussões realizadas em sala de aula a respeito dos lançamentos de projéteis e suas velocidades de escape constituem apenas uma discussão teórica a respeito do assunto. Na prática, esses valores não são reais e de acordo com esse estudo, as velocidades necessárias para promover o escape de um projétil do campo gravitacional da Terra, bem como sua energia de lançamento teriam valores absurdamente grandes e irrealistas, portanto, impossíveis de serem realizados.

## REFERÊNCIAS

- Barroso, L. C. (1987). **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo: Harbra.
- Faruzi, J. e Matos, J. M. (1998). **Estudo Numérico do Movimento de Projéteis**. Rev. Bras. Ens. Fís. **20**, 4.

Feynman, R.P.; Leighton, R.B. and Sands, M. (1965). **Feynmann Lectures on Physics**. (vol II, figura 41-4). Massachusetts: Addison-Wesley.

Gaspar, A. (2003). **Física 1**. São Paulo: Ática.

Halliday, D.; Resnick, R. e Merrill, J. (1994). **Fundamentos de Física 1**, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos Científicos.

Marion, J. B. e Thornton S. T. (1970). **Clássical Dynamics of Particles and Systems**. Suders College Publishing.

Newton, Sir I. (1987). **Princípios Matemáticos da Filosofia Natural**. Coleção Os Pensadores, trad. de C.L. Mattos et. Alii. São Paulo: Nova Cultura.

Oliveira, P. M. C. O. **Queda de uma Bola de Isopor**, Universidade Federal Fluminense, sítio da WEB <https://sec.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvii/sys/resumos/T0523-1.pdf>

Prandtl, L. e Tietjens, O. G. (1957). **Applied Hydro and Aerodynamics**. New York: Dover Publications.

Scheid, F. (1991). **Análise Numérica**. Portugal: Editora McGraw-Hill.

Sears, F.; Young, H.D. e Zemansky, M.W. (1995). **Física 1**, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos Científicos.

Serway, R. A. e Jewett, J. W. (2004). **Princípios de Física**. São Paulo: Thomson Pioneira.

Tipler, P.A. e Mosca, G. (2006). **Física 1**, Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos Científicos.

---

Recebido em: 17/06/2009

Aceito em: 11/10/2009

**\*Endereço para correspondência:**

**Núcleo de Educação a Distância** - Rua Carolina Fonseca, 584 – Itaquera 08230-030 - São Paulo, SP – Brasil - Fone: (11) 2070-0239  
Universidade Camilo Castelo Branco. E-mail: [ead.sp@unicastelo.br](mailto:ead.sp@unicastelo.br)